Határeloszlás- és nagy eltérés tételek **3/1/0/v/5**

Tárgyfelelős: Tóth Bálint
További oktatók: Balázs Márton, Fritz József, Szász Domokos

I. rész: Határeloszlás-tételek:
Valószínűségi mértékek és eloszlások gyenge konvergenciája Feszesség: Helly-Prohorov-tétel. Határeloszlás-tételek puszta kézzel: Tükrözési elv alkalmazása bolyongásra: Paul Lévy arcussinus tételei, maximum, lokális idő és első elérések határeloszlása. Független és azonos eloszlású valószínűségi változók maximumának határeloszlása, extremális eloszlások. Határeloszlás-tétel a szelvénygyűjtő (coupon collector) problémájára. Határeloszlás-tétel bizonyítása momentum-módszerrel. Határeloszlás-tétel bizonyítása karakterisztikus függvény módszerével. Lindeberg-tétel alkalmazásai. Erdős–Kac-tétel: CHT a prímosztók számára. Stabilis eloszlások. Szimmetrikus stabilis eloszlások karakterisztikus függvényeinek jellemzése. Konvergencia szimmetrikus stabilishoz. Alkalmazások. Általános (nem szimmetrikus) stabilis eloszlás karakterisztikus függvényének jellemzése, ferdeség. Határeloszlás-tétel nem szimmetrikus esetben.
Korlátlanul osztható eloszlások: Lévy–Hincsin-formula, Lévy-mérték. Poisson pont folyamatok és kapcsolatuk korlátlanul osztható eloszlásokkal. Korlátlanul osztható eloszlások mint széria-sorozatok határeloszlása. Alkalmazások.
Lévy-folyamatok – bevezetés: Lévy–Hincsin formula és a folyamatok felbontása. Pozitív (növekvő, szubordinátor) és korlátos változású Lévy-folyamatok. Stabilis folyamatok. Példák és alkalmazások.
II. rész: Nagy eltérés tételek:
Bevezetés: Ritka események és nagy eltérések, nagy eltérés elv (LDP), nagy eltérések számolása puszta kézzel (Stirling-formulával).
Kombinatorikus módszerek: Típusok módszere, Szanov-tétel véges abc-re.
Nagy eltérés tételek véges dimenzióban: Bernstein-egyenlőtlenség, Chernov-korlát. Cramer-tétel. Konvex analízis elemei, konvex konjugálás véges dimenzióban, Cramer tétel R^d-ben. Gartner–Ellis-tétel. Alkalmazások: nagy eltérés tételek bolyongásokra, véges állapotterű Markov-láncok trajektóriájának empirikus eloszlására, statisztikai alkalmazások.
Általános elmélet: Nagy eltérés elvek általában. Kontrakciós elv és Varadhan-lemma. Nagy eltérések topologikus vektorterekben, függvényterekben, absztrakt konvex analízis. Alkalmazások: Schilder-tétel, Gibbs feltételes mérték és statisztikus fizika elemei.

Irodalom:
A. Dembo, O. Zeitouni: *Large deviation techniques and application.* Springer, 1998
R. Durrett: *Probability: theory and examples*. Second edition. Duxbury, 1996
B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov: *Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai*
W. Feller: *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.2. Wiley, 1970
D.W. Stroock: *An introduction to the theory of large deviations.* Springer, 1984
S.R.S. Varadhan: *Large deviations and applications.* SIAM Publications, 1984
D. Williams: *Probability with martingales*. Cambridge UP, 1990
Cikkek, előadók jegyzetei

Limit- and large deviation theorems of probability theory 3/1/0/v/5

Course coordinator: Bálint Tóth
Other instructors: Márton Balázs, József Fritz, Domokos Szász

Part I.: Limit theorems:
Weak convergence of probability measures and distributions. Tightness: Helly-Ptohorov theorem. Limit theorems proved with bare hands: Applications of the reflection principle to random walks: Paul Lévy's arcsine laws, limit theorems for the maximum, local time and hitting times of random walks. Limit theorems for maxima of i.i.d. random variables, extremal distributions. Limit theorems for the coupon collector problem. Proof of limit theorem with method of momenta. Limit theorem proved by the method of characteristic function. Lindeberg's theorem and its applications: Erdős–Kac theorem: CLT for the number of prime factors. Stable distributions. Stable limit law of normed sums of i.i.d. random variables. Characterization of the characteristic function of symmetric stable laws. Weak convergence to symmetric stable laws. Applications. Characterization of characteristic function of general (non-symmetric) stable distributions, skewness. Weak convergence in non-symmetric case. Infinitely divisible distributions:. Lévy–Hinchin formula and Lévy measure. Lévy measure of stable distributions, self-similarity. Poisson point processes and infinitely divisible laws. Infinitely divisible distributions as weak limits for triangular arrays. Applications.
Introduction to Lévy processes: Lévy–Hinchin formula and decomposition of Lévy processes. Construction with Poisson point processes (a la Ito). Subordinators and Lévy processes with finite total variation, examples. Stable processes. Examples and applications.
Part II.: Large deviation theorems:
Introduction: Rare events and large deviations. Large deviation principle. Computation of large deviation probabilities with bare hands: application of Stirling's formula.
Combinatorial methods: The method of types. Sanov's theorem for finite alphabet.
Large deviations in finite dimension: Bernstein's inequality, Chernoff's bound, Cramer's theorem. Elements of convex analysis, convex conjugation in finite dimension, Cramer's theorem in R^d. Gartner–Ellis theorem. Applications: large deviation theorems for random walks, empirical distribution of the trajectories of finite state Markov chains, statistical applications.
The general theory: general large deviation principles. The contraction principle and Varadhan's lemma. large deviations in topological vector spaces and function spaces. Elements of abstract convex analysis. Applications: Schilder's theorem, Gibbs conditional measures, elements of statistical physics.

References:
A. Dembo, O. Zeitouni: *Large deviation techniques and application.* Springer, 1998
R. Durrett: *Probability: theory and examples*. Second edition. Duxbury, 1996
B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov: *Limit theorems for sums of independent random variables,* 1951
W. Feller: *An introduction to probability theory and its applications*. Vol.2. Wiley, 1970
D.W. Stroock: *An introduction to the theory of large deviations.* Springer, 1984
S.R.S. Varadhan: *Large deviations and application* . SIAM Publications, 1984
D. Williams: *Probability with martingales*. Cambridge UP, 1990
research papers, lecture notes